M·F·A
MVSEVM FVR ABGVSSE KLASSISCHER BILDWERKE MVNCHEN VND ELLEN HARLIZIVS-KLVCK

Antike Arithmetik und Weberei

Ordnung und Musterung

Descartes lehrt in der zehnten Regel zur Leitung des Verstandes, „dass wir uns nicht sofort mit schwierigen und Mühevollen Gegenständen beschäftigen dürfen, sondern zuerst mit ganz unbedeutenden und simplen Künsten, in welchen große Ordnung herrscht, wie die Herstellung von Stoffen und Tapisserien, das Sticken und das Verflechten von Fäden zu unbegrenzten Arten verschiedener Gewebe, ebenso Zahlenspiele und alles, was zur Arithmetik gehört und die Erkenntniskraft ganz außerordentlich übt."

Dieser zunächst verblüffenden Verbindung von Weberei und Arithmetik ist die hier gezeigte Präsentation gewidmet. Sie rekonstruiert einen Zusammenhang zwischen der logischen, dualistischen und digitalen Struktur von Geweben und dem Beginn der mathematischen Logik in der dyadischen Arithmetik der Antike. Das in der antiken Textilkunst sehr beliebte und schon früh nachweisbare Muster des Quadrats im Quadrat, das links auf einem Teller aus Zypern zu sehen ist, soll zum Modellfall der Betrachtung werden.

Beim Weben werden Fäden parallel gespannt (die Kettfäden) und weitere Fäden (der Schuss oder Eintrag) senkrecht dazu über und unter diesen Fäden durchgeführt. Schon früh hat man einen Stab, den *kanon*, benutzt, um wiederholt jeden zweiten Kettfaden anzuheben und so die Fäden nach geradzahligen und ungeradzahligen zu gruppieren. Das erleichtert die Berechnung der Muster, denn die Teilbarkeit der Kettfadenanzahl bestimmt, welche Rapporte (also Musterwiederholungen) gewebt werden können. Ist die Anzahl der Kettfäden eine Primzahl, so ist kein vollständiger Rapport möglich.

Links: Teller aus Zypern mit der Darstellung eines geometrisch gemusterten Gewebes auf dem Gewichtswebstuhl, ca. 850-750 v. Chr., Antikensammlungen der Universität Bonn

Muster als visuelle Algebra

Wegen der diskreten (abzählbaren) Struktur des Gewebes muss jedes geometrische Motiv in Verhältnisse natürlicher Zahlen übersetzt werden. Eine besondere Art der Arithmetik erleichterte diese Aufgabe: die Lehre von Gerade und Ungerade, manchmal auch dyadische (zweiwertige) Arithmetik genannt. Sie unterscheidet und ordnet Zahlen nach Teilbarkeitseigenschaften und ihre Sätze geben an, wie man Zahlen mit bestimmten Eigenschaften erzeugt bzw. welche Zahleigenschaften durch solche Erzeugungsmethoden entstehen. Pythagoras gilt als ihr Erfinder, doch zu jener Zeit, also etwa 550 v. Chr., war die Musterweberei bereits hoch entwickelt. Außerdem erschwerte die griechische Zahldarstellung die Entdeckung von Teilbarkeitseigenschaften. Könnte die Musterweberei als eine Art visueller Algebra umgekehrt Ausgangspunkt der dyadischen Arithmetik gewesen sein?

Die Dualität ist für viele Webtechniken noch in einer anderen Hinsicht charakteristisch. Homer berichtet davon, dass Helena während der Kämpfe um Troia an einem Doppelgewebe (*diplax*) arbeitet. Dabei entsteht am Webstuhl gleichzeitig eine helle und eine dunkle Stofflage, die für die Musterung vertauscht werden. Eine rotfigurigen Keramik (rechts) zeigt Penelope vor einem Gewebe, das in München als Doppelgewebe rekonstruiert wurde – wobei sich auf der Rückseite die Farben und Motive umkehren.

Penelope am Webstuhl, rotfigurige Vasenmalerei, ca. 440 v. Chr., Chiusi, Archäologisches Nationalmuseum

Rekonstruktion des Gewebes der Penelope als Doppelgewebe, Rückseite, ausgeführt von Ellen Harlizius-Klück, 2009, Museum für Abgüsse Klassischer Bildwerke, München

Rekonstruktion des Gewebes der Penelope, Vorderseite, ausgeführt von Ellen Harlizius-Klück, 2009, Museum für Abgüsse Klassischer Bildwerke, München

M·F·A
MVSEVM FVR ABGVSSE KLASSISCHER BILDWERKE MVNCHEN VND ELLEN HARLIZIVS-KLVCK

Antike Arithmetik und Weberei

Achilles und Aias beim Brettspiel, schwarzfigurige Amphora des Exekias, um 530 v. Chr., Vatikanische Museen

Dualität auf Vasen: Bilinguale

Der Töpfer Exekias schuf um 530 v. Chr. eine schwarzfigurige Amphore, die Achilles und Aias beim Brettspiel zeigt. Man sieht die Figuren und Gegenstände dunkel auf hellem Grund. Etwa um 530 entsteht auch die rotfigurige Keramik, bei der die Hell-Dunkel-Ordnung der Bilder umgekehrt wird. Andokides greift die Szene mit Aias und Achilles auf und gestaltet mit ihr beide Seiten seiner Amphore, wobei er beide Techniken kombiniert. Diese kombinierte Verwendung ist technisch schwierig, weshalb diese als Bilinguale bezeichneten Keramiken selten sind. Noch seltener findet man auf beiden Seiten die gleiche Szene.

Was in der Weberei ein Effekt der technischen Logik ist, erfordert in der Keramik genaue Überlegung und einen hohen technischen Aufwand. Wenn man diese Schwierigkeiten in Kauf nahm, so gab es offensichtlich ein besonderes Interesse an dieser komplementären Technik. Die Vermutung wird unterstützt durch das verwendete Motiv: Aias und Achilles spielen nämlich mit jenen Spielsteinen oder *psephoi*, die die griechischen Mathematiker für ihre frühesten Beweise benutzt haben sollen. Mit schwarzen und weißen Steinchen legten sie Zahlen in Formen um an diesen Figuren Zahleigenschaften zu visualisieren und ihre Argumente zu entwickeln. Denn eine Algebra kannten die Griechen noch nicht.

Dyadische Arithmetik

Pythagoras lehrte, dass alle Dinge aus Zahlen gemacht sind. Aristoteles machte sich über diese Zahlauffassung lustig als er über den Pythagoreer Eurytos schrieb, dass er „ …wie diejenigen, welche die Zahlen in die Gestalten vom Dreieck und Viereck stellen, so mit Rechenpfennigen Gestalten denen der Pflanzen ähnlich bildete…" Die Definitionen und Sätze dieser pythagoreischen Zahlenlehre oder dyadischen Arithmetik sind in Euklids Buch Die Elemente überliefert.

Def. 1	Einheit ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird.
Def. 2	Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge.
Def. 6	Gerade ist die Zahl, die sich halbieren läßt;
Def. 7	und ungerade die, die sich nicht halbieren läßt, oder die sich um die Einheit von einer geraden Zahl unterscheidet.
Def. 8	Grademal gerade ist die Zahl, die sich von einer geraden Zahl nach einer geraden Zahl messen läßt;
Def. 9	grademal ungerade ist die, die sich von einer geraden Zahl nach einer ungeraden Zahl messen läßt;
Def. 10	ungerademal ungerade ist die Zahl, die sich von einer ungeraden Zahl nach einer ungeraden Zahl messen läßt.

Satz 21	Setzt man beliebigviele gerade Zahlen zusammen, so ist die Summe gerade.
Satz 22	Setzt man beliebigviele ungerade Zahlen zusammen und ist ihre Anzahl gerade, so muß die Summe gerade sein.
Satz 31	Wenn eine ungerade Zahl gegen irgendeine Zahl prim ist, dann muß sie auch gegen deren doppeltes prim sein.
Satz 32	Jede der Zahlen, die durch Verdoppelung von der Zwei aus entstehen, ist ausschließlich grademal gerade.
Satz 33	Eine Zahl, deren Hälfte ungerade ist, ist ausschließlich grademal ungerade.
Satz 34	Wenn eine (gerade) Zahl weder zu denen gehört, die durch Verdoppelung von der Zwei aus entstehen, noch eine ungerade Zahl als Hälfte hat, dann ist sie sowohl grademal gerade als auch grademal ungerade.

Achilles und Aias beim Brettspiel, rotfigurige Seite.

Achilles und Aias beim Brettspiel, bilingue Amphora des Andokides, schwarzfigurige Seite, ca. 525-520 v. Chr., Museum of Fine Arts, Boston

M·F·A
MVSEVM FVR ABGVSSE KLASSISCHER BILDWERKE MVNCHEN VND ELLEN HARLIZIVS-KLVCK

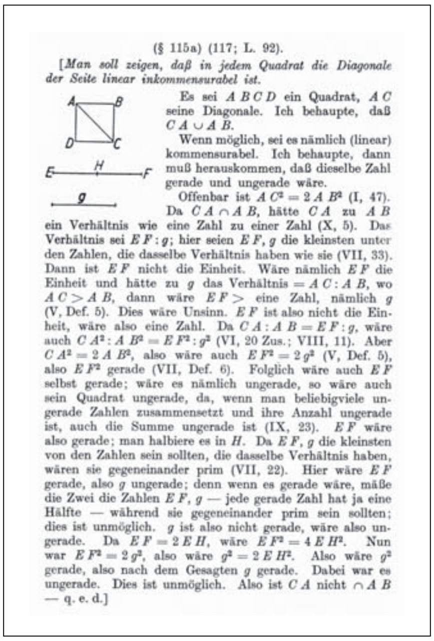
Antike Arithmetik und Weberei

Dyadische Arithmetik und die Inkommensurabilität im Quadrat

Etwa 700 v. Chr. beginnen griechische Philosophen ihre Gedanken über Geometrie und Zahlen als begründbares Wissen zu diskutieren und aufzuschreiben. Sokrates stellt seinen Schülern mathematische Fragen und Platon gewährt nur Männern Zutritt zur Akademie, die Geometrie beherrschen.

Euklid fasst den mathematischen Wissensstand um 350 v. Chr. im Buch Die Elemente nach systematischen Gesichtspunkten zusammen. Er überliefert auch die dyadische Artihmetik, deren Sätze zwar als solche nicht von besonderem Interesse sind, deren dualistische Zahlauffassung aber indirekte Beweise möglich macht, die für die weitere Entwicklung der Mathematik von großer Bedeutung waren. Diese Methode wird bei einem der wichtigsten Beweise der Antike verwendet: dem der Inkommensurabilität von Seite und Diagonale im Quadrat.

Rechts: Beweis der Inkommensurabilität im Quadrat bei Euklid



(§ 115a) (117; L. 92).

[*Man soll zeigen, daß in jedem Quadrat die Diagonale der Seite linear inkommensurabel ist.*

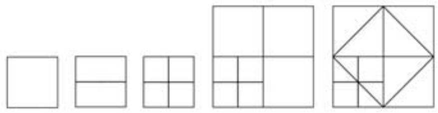
Es sei $ABCD$ ein Quadrat, AC seine Diagonale. Ich behaupte, daß $CA \cup AB$.

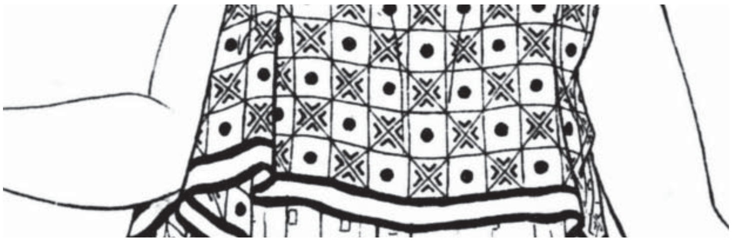
Wenn möglich, sei es nämlich (linear) kommensurabel. Ich behaupte, dann muß herauskommen, daß dieselbe Zahl gerade und ungerade wäre.

Offenbar ist $AC^2 = 2AB^2$ (I, 47). Da $CA \cap AB$, hätte CA zu AB ein Verhältnis wie eine Zahl zu einer Zahl (X, 5). Das Verhältnis sei $EF : g$; hier seien EF, g die kleinsten unter den Zahlen, die dasselbe Verhältnis haben wie sie (VII, 33). Dann ist EF nicht die Einheit. Wäre nämlich EF die Einheit und hätte zu g das Verhältnis $= AC : AB$, wo $AC > AB$, dann wäre $EF >$ eine Zahl, nämlich g (V, Def. 5). Dies wäre Unsinn. EF ist also nicht die Einheit, wäre also eine Zahl. Da $CA : AB = EF : g$, wäre auch $CA^2 : AB^2 = EF^2 : g^2$ (VI, 20 Zus.; VIII, 11). Aber $CA^2 = 2AB^2$, also wäre auch $EF^2 = 2g^2$ (V, Def. 5), also EF^2 gerade (VII, Def. 6). Folglich wäre auch EF selbst gerade; wäre es nämlich ungerade, so wäre auch sein Quadrat ungerade, da, wenn man beliebigviele ungerade Zahlen zusammensetzt und ihre Anzahl ungerade ist, auch die Summe ungerade ist (IX, 23). EF wäre also gerade; man halbiere es in H. Da EF, g die kleinsten von den Zahlen sein sollten, die dasselbe Verhältnis haben, wären sie gegeneinander prim (VII, 22). Hier wäre EF gerade, also g ungerade; denn wenn es gerade wäre, mäße die Zwei die Zahlen EF, g — jede gerade Zahl hat ja eine Hälfte — während sie gegeneinander prim sein sollten; dies ist unmöglich. g ist also nicht gerade, wäre also ungerade. Da $EF = 2EH$, wäre $EF^2 = 4EH^2$. Nun war $EF^2 = 2g^2$, also wäre $g^2 = 2EH^2$. Also wäre g^2 gerade, also nach dem Gesagten g gerade. Dabei war es ungerade. Dies ist unmöglich. Also ist CA nicht $\cap AB$ — q. e. d.]

In der Argumentation wird die Tatsache ausgenutzt, dass eine Zahl nicht zugleich gerade und ungerade sein kann. Der Beweis setzt außerdem voraus, dass man zwei Zahlen so lange kürzen kann, bis sie gegeneinander prim sind. Weil dies nicht leicht zu zeigen ist, vermutet man, dass es zunächst einen Beweis ohne eine solche Voraussetzung gab, nämlich einen Rechensteinbeweis, bei dem ein Quadrat so verdoppelt wird, dass wiederum ein Quadrat entsteht, bzw. ein Quadrat so in Teile zerlegt wird, dass man aus ihnen zwei gleich große Quadrate erzeugen kann.

Eine solche Verdoppelung des Quadrats entlockt Sokrates im Dialog Menon einem unwissenden Knaben. Stellen wir uns vor, dieser begegnet einer Griechin, die einen Peplos mit einem solchen Muster trägt. Wie würde sie mit der Aufgabe umgehen?





Der Rechensteinbeweis

In der aufgebauten Computerpräsentation kann ein solcher Beweis mit Rechensteinen entwickelt werden. Vorbild ist die Vorgehensweise der Weberin beim Organisieren der Fäden für ein Quadratmuster, ausgehend von einer Fallunterscheidung zwischen gerader und ungerader Kettfadenanzahl. Das Ergebnis soll hier nicht verraten werden, denn wie Descartes sagt, wird der Verstand an den unbedeutenden Textilkünsten nur dann geübt, „wenn wir seine Entdeckung nur nicht anderen verdanken, sondern allein uns selbst."